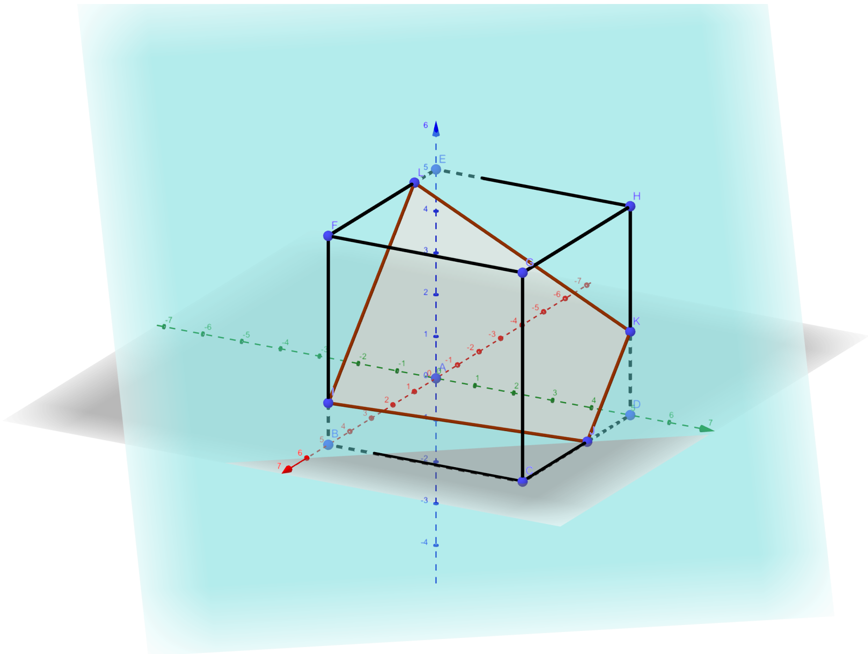
Lösungsvorschläge zum Abitur Bayern 2019

Keine offiziellen Lösungen, keine Garantie auf Vollständigkeit, Korrektheit etc.

Teil B, Geometrie, Aufgabengruppe II ***Würfel***

Vektorpfeile sind der Übersichtlichkeit halber nicht überall gesetzt.

Aufgabe (a)



Um zu zeigen, dass es sich bei dem Viereck $IJKL$ um ein Trapez handelt, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, ist zu zeigen:

1. Die Punkte I, J, K und L liegen in einer Ebene.
2. Zwei Seiten (hier LI und JK) sind parallel.
3. Zwei gegenüberliegende Seiten (hier IJ und KL) sind gleich lang.

(1.) ist bereits nach Angabe erfüllt, da die Punkte in der Ebene F liegen. Für die übrigen Bedingungen stellen wir zunächst die Verbindungsvektoren der Seiten auf:

$$IJ = J - I = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$JK = K - J = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$KL = L - K = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-5 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$LI = I - L = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-0 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht, dass die Vektoren JK und LI Vielfache voneinander sind (um den Faktor -2) und daher parallel sind. Außerdem sind die Einträge der Vektoren IJ und KL betragsmäßig bis auf Reihenfolge identisch, sodass die Längen gleich sind:

$$|IJ| = |KL| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35} \approx 5,92$$

Aufgabe (b)

Für die Ebenengleichung wählen wir als Aufpunkt I und als Richtungsvektoren IJ und LI. Da die Normalform verlangt sind, wird der Normalenvektor n per Kreuzprodukt berechnet.

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Über den Ansatz $n \circ (X - I) = 0$ ergibt sich die Ebenengleichung:

$$T : \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$T : 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$$

Aufgabe (c)

Der Mittelpunkt der Würfelfläche $CDGH$, ist offensichtlich der Punkt $M = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$. Dieser Punkt muss auf der Geraden g_a liegen. Da der Aufpunkt der Geraden $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ unabhängig von a ist, haben wir zwei Punkte, die eindeutig eine Gerade definieren. Wir bestimmen also den Richtungsvektor als Differenz der beiden bekannten Punkte:

$$\begin{pmatrix} 2,5 - 2,5 \\ 0 - 5 \\ 3,5 - 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die (Richtungs-)Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ müssen Vielfache voneinander sein, damit durch sie dieselbe Gerade beschrieben wird. Damit das erfüllt ist, muss $-10a = (-5) \cdot \frac{2}{a}$ gelten, weil der 2. Eintrag des Vektors immer das (-5)-fache des 3. Eintrags sein muss. Es folgt

$$-10a = (-5) \cdot \frac{2}{a} \Leftrightarrow -10a = \frac{-10}{a} \Leftrightarrow -10a^2 = -10 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

Weil nach Angabe $a \in \mathbb{R}^+$ gilt, folgt also, dass die Gerade g_a für $a = 1$ durch den Mittelpunkt der Würfelfläche $CDGH$ verläuft.

Anmerkung Man kann das auch durch Probieren rausbekommen, da man recht schnell sieht, dass $a = 1$ sein muss.

Aufgabe (d)

Die Ebene $U : x_1 = 2,5$ ist eine Parallele zur x_2x_3-Ebene. Spiegelt man einen Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ an U, so ändert sich daher nur dessen x_1-Koordinate, und zwar um das Doppelte des Unterschieds zwischen p_3 und der x_3-Koordinate der Ebene, also $2,5$. D.h. der (Ortsvektor des) Spiegelpunkt(es) lautet

$$P' = \begin{pmatrix} p_1 + 2 \cdot (2,5 - p_1) \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Die übliche Herangehensweise (Abstand Punkt - Ebene ausrechnen und dann Punkt rückwärts um das doppelte des normierten Normalenvektors verschieben), führt hier auf dasselbe Ergebnis. Die HNF der Ebene U lautet $-x_1 + 2,5 = 0$ (beachte, dass der variablenfreie Summand nichtnegativ sein muss!), damit ist der Normalenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Einsetzen des Punktes P liefert den Abstand $-p_1 + 2,5 = 2,5 - p_1$ des Punktes P von U. Der Spiegelpunkt ist

$$P' = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot (2,5 - p_1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2 \cdot (2,5 - p_1) \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (e)

Liegt für ein a die Gerade g_a in T, so liegt sie (weil die Geraden g_a für alle a in U liegen) gleichzeitig in T und U und ist also die Schnittgerade von T und U. Weil T' die durch Spiegelung von T an U entstehende Ebene ist und bei Spiegelungen Punkte, die auf der Spiegelebene liegen, unverändert bleiben, liegt g_a für dieses a auch in T'. Damit haben auch T und T' diese Gerade gemeinsam, sie ist also auch die Schnittgerade von T und T'. (T' muss in dieser Aufgabe nicht konkret bestimmt werden!)

Wir bestimmen nun das a, für welches g_a in T liegt. Dafür muss zunächst der Normalenvektor der Ebene senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden stehen. Es muss also gelten:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 0 + 4 \cdot (-10a) + 5 \cdot \frac{2}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-40a + \frac{10}{a} = 0 \Leftrightarrow 40a = \frac{10}{a} \Leftrightarrow 40a^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

Wegen $a \in \mathbb{R}^+$ kommt nur $a = \frac{1}{2}$ infrage. Wir müssen nun noch zeigen, dass der Aufpunkt der Geraden g_a (also $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix}$) in T liegt. Dies geschieht durch Einsetzen:

$$5(2,5) + 4(0) + 5(3,5) - 30 = 12,5 + 0 + 17,5 - 30 = 30 - 30 = 0$$

Damit ist gezeigt, dass g_a für $a = \frac{1}{2}$ in T liegt.

Alternative: Man kann diese Aufgabe auch konstruktiv von hinten aufzuzäumen. Wir suchen die Schnittgerade der Ebenen T und T', wobei T' durch Spiegelung von T an der Ebene U entsteht. Da die Ebene T offensichtlich (verschiedene Normalenvektoren) nicht parallel zur Ebene U ist, schneiden sich T und U in einer Geraden. Aufgrund der Symmetrie ist diese Gerade auch die Schnittgerade von T und T'.

Daher müssen wir die Ebene T' nicht bestimmen, sondern berechnen die Schnittgerade von T und U über das folgende unterbestimmte Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{matrix} x_1 = 2,5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = 2,5 \\ x_2 := \lambda \\ x_3 = \frac{17,5}{5} - \frac{4\lambda}{5} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = 2,5 \\ x_2 := \lambda \\ x_3 = 3,5 - \frac{4\lambda}{5} \end{matrix}\right\}$$

Die Lösungsmenge (Schnittgerade) lautet:

$$h : X = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Die Gerade h entspricht einer der Geraden g_a, wenn die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ Vielfache voneinander sind (analog Aufgabe (c)). Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{2}{a} = -\frac{4}{5} \cdot (-10a) \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 8a \Leftrightarrow 2 = 8a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = a^2 \Leftrightarrow \pm\frac{1}{2} = a$$

Wegen der $a \in \mathbb{R}^+$ ist $a = \frac{1}{2}$ die Lösung.

Aufgabe (f)

Die Höhe einer Pyramide ist der Abstand zwischen der Ebene, in der die Grundfläche liegt, und der Spitze. In unserem Fall ist also der Abstand der Spitze von der Ebene T zu bestimmen. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene wird über die HNF bestimmt. Für F lautet diese:

$$T : \frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 5^2}} = 0$$
$$T : \frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{66}} = 0$$

Wir setzen nun zunächst die beiden Eckpunkte der Stecke $[FG]$ ein, auf der die Spitze ja liegen soll:

$$d(F,T) = \left| \frac{5(5) + 4(0) + 5(5) - 30}{\sqrt{66}} \right| \approx 2,462$$
$$d(G,T) = \left| \frac{5(5) + 4(5) + 5(5) - 30}{\sqrt{66}} \right| \approx 4,924$$

Die Höhe kann nur Werte zwischen diesen beiden Extremwerten annehmen, also niemals 2. (Formal könnte man hier mit Stetigkeit und Zwischenwertsatz argumentieren, das ist aber kein Schulstoff).