Lösungsvorschläge zum Abitur Bayern 2019

Keine offiziellen Lösungen, keine Garantie auf Vollständigkeit, Korrektheit etc.

Teil B, Geometrie, Aufgabengruppe I *Geothermieanlage*

Vektorpfeile sind der Übersichtlichkeit halber nicht überall gesetzt.

Aufgabe (a)

Die Gesamtlänge des Bohrkanals setzt sich aus der Länge der Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ zusammen. Die Länge der ersten Strecke kann man durch Koordinatenvergleich (x_3-Koordinate als einzige Veränderung) ablesen; sie beträgt 1, was 1 km im Sachzusammenhang entspricht.

Die Länge der zweiten Strecke ist die Länge des Verbindungsvektors

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ -3,5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

also $\sqrt{1^2+1^2+4,5^2} = 2,872281\ldots$ also im Sachzusammenhang auf Meter gerundet 2.872 m.

Insgesamt beträgt die Gesamtlänge des Bohrkanals also 3.872 m.

Aufgabe (b)

Gesucht ist der Schnittwinkel der beiden Geraden. Dass die Geraden sich tatsächlich schneiden, ist nach Definition klar (P liegt auf beiden Geraden). Zu bestimmen ist lediglich der (spitze) Winkel, den die Richtungsvektoren dieser Geraden, also $\vec{AP}$ und $\vec{PQ}$ einschließen. Dies funktioniert mithilfe der Cosinus-Formel:

$$\cos\alpha = \frac{AP \circ PQ}{|AP| \cdot |PQ|} \approx \frac{2,5}{1 \cdot 2,8722} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2,5}{1 \cdot 2,8722} \approx 29,5^\circ$$

Aufgabe (c)

Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E in Normalform. Der Normalenvektor ist der Richtungsvektor der Gerade durch P und Q, da diese senkrecht auf der Ebene stehen soll. Als Aufpunkt verwenden wir Q. Der Ansatz lautet also:

$$E : PQ \circ (X - Q) = 0 \Leftrightarrow$$

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 + 3,5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$E : x_1 + x_2 - 2,5x_3 - 10,75 = 0$$

Das Endergebnis entspricht dem $\frac{1}{4}$-fachen des Kontrollergebnisses.

Aufgabe (d)

Für die Gleichung der Geraden g durch P und Q in Form des allgemeinen Geradenpunktes gilt:

$$g : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -1 - 2,5\lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Für den Punkt R ist bekannt, dass er auf der Geraden g liegt und von der Form $(r_1|r_2|-3,6)$ ist.

Damit der Punkt R auf der Geraden liegt, muss er die Form des allgemeinen Geradenpunktes annehmen; es muss also ein λ geben, für das

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -1 - 2,5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -3,6 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Aus der dritten Zeile erhalten wir:

$$-1 - 2,5\lambda = -3,6 \Leftrightarrow -2,5\lambda = -2,6 \Leftrightarrow \lambda = 1,04$$

und damit $R = (1,04|1,04|-3,6)$.

Die Dicke der gesteinsführenden Schicht ist die Länge des Vektors QR. Diese ergibt sich durch

$$\sqrt{(1,04-1)^2 + (1,04-1)^2 + (-3,6-(-3,5))^2} \approx 0,1148912 \approx 115[m]$$

Aufgabe (e)

Die Gleichung des zweiten Bohrkanals (hier genannt: Gerade h) mit Aufpunkt $(t, -t, 0)$ und Richtung parallel zur x_3-Achse lautet:

$$h : X = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ \mu \end{pmatrix}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Um den Stelle zu finden, an der der zweite Bohrkanal die wasserführende Gesteinsschicht trifft, wird der Schnittpunkt von h mit der Ebene E aus Aufgabe (c) bestimmt. Dafür wird der allg. Geradenpunkt in die Ebenengleichung eingesetzt.

$$t - t - 2,5\mu - 10,75 = 0 \Leftrightarrow -2,5\mu = 10,75 \Leftrightarrow \mu = -4,3$$

Man sieht, dass μ unabhängig von t eindeutig als $-4,3$ bestimmt ist, womit sich durch Rückeinsetzen in die Geradengleichung der Schnittpunkt $T(t|-t|-4,3)$ wie gesucht ergibt.

Geometrisch gesehen liegt die Menge aller möglichen Punkte B (diese bilden eine Gerade, siehe Anmerkung) parallel zur Gesteinsschicht (Ebene E). Daher ist der Abstand der Bohrstelle B von der Gesteinsschicht E und damit die Länge des zweiten Bohrkanals auch unabhängig von t konstant.

Anmerkung Die Definition des Punktes B kann man als Gerade auffassen, deren Aufpunkt $(0|0|0)$ ist und deren Richtung durch $(1, -1, 0)$ gegeben ist.

$$B = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ sieht man auch sofort, wenn man den Verbindungsvektor BT aufstellt, dessen Betrag die Länge des zweiten Bohrkanals beschreibt, dass ein von t unabhängiger Vektor entsteht, dessen Länge dann natürlich ebenfalls von t unabhängig ist.

$$BT = \begin{pmatrix} t - t \\ (-t) - (-t) \\ -4,3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe (f)

Der Abstand der Stellen, an denen die Bohrkanäle auf die Gesteinsschicht treffen, ist die Länge des Vektors QT. Dieser lautet

$$QT = \begin{pmatrix} t-1 \\ (-t)-1 \\ -4,3-(-3,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -1-t \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

. Der Betrag = Länge ergibt sich durch die Wurzel links; überprüft werden soll, ob der Abstand mindestes 1.500 m beträgt, also 1,5 im Modell.

$$\sqrt{(t-1)^2 + (-1-t)^2 + 0,8^2} \geq 1,5 \Leftrightarrow$$

Die Wurzel kann durch Quadrieren eliminiert werden.

$$(t-1)^2 + (-1-t)^2 + 0,64 \geq 2,25 \Leftrightarrow$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$2t^2 + 2,64 \geq 2,25$$

Dies ist offensichtlich immer erfüllt, da $2t^2 \geq 0$.