Lösungsvorschläge zum Abitur Bayern 2019

Keine offiziellen Lösungen, keine Garantie auf Vollständigkeit, Korrektheit etc.

Teil B, Analysis, Aufgabengruppe II *Medikament*

Teilaufgabe (a)

Als Nullstellen kommen nur solche $x \in \mathbb{R}$ infrage, für die der Zähler 0 ist. $x = 0$ ist die einzige Zählernullstelle, diese liegt auch innerhalb des Definitionsbereichs.

Die Gleichung der senkrechten Asymptote ist $x = -1$, also dort, wo die (doppelte) Polstelle (nicht hebbare Singularität = Nullstelle des Nenners, die sich nicht mit Nullstellen des Zählers kürzt) sich befindet.

Nach der Regel 1 = Zählergrad < Nennergrad = 2 schließt man, dass $y = 0$ die waagrechte Asymptote ist.

Teilaufgabe (b)

Für die Bestimmung der Lage des Extrempunkts benötigen wir die Ableitung.

$$f'(x) = \frac{4 \cdot (x+1)^2 - 2(x+1) \cdot 4x}{(x+1)^4} = \frac{4x^2 + 8x + 4 - 8x^2 - 8x}{(x+1)^4} = \frac{-4x^2 + 4}{(x+1)^4}$$

Kandidaten für Extremstellen sind die Nullstellen der Ableitung, hier also die Nullstellen des Zählers:

$$-4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 = 4x^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow \pm 1 = x$$

Infrage kommt nur $x = +1$, da -1 außerhalb des Definitionsbereichs liegt.

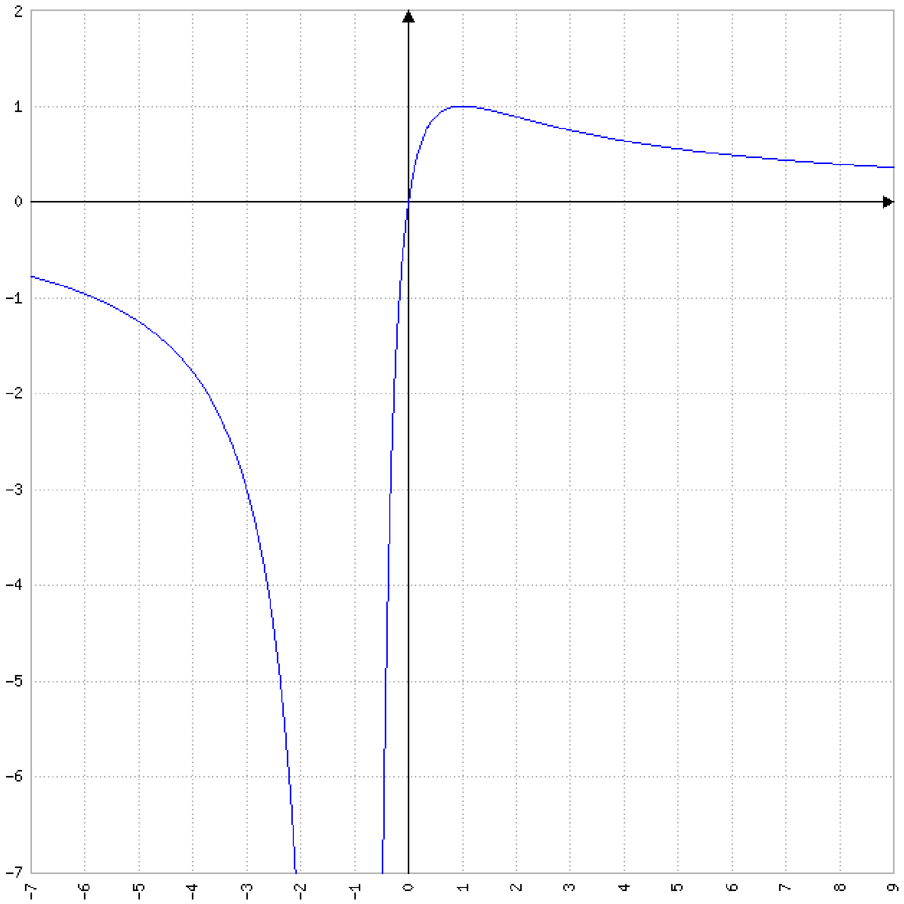
Für die Bestimmung der Art des Extrempunkts verwenden wir eine Vorzeichenbetrachtung für die Intervalle $A =]-1; 1[$ und $B =]1; +\infty[$. Für $x \in A$ (z.B. $x = 0$) ist $f'(x) > 0$, für $x \in B$ (z.B. $x = 2$) ist $f'(x) < 0$. Es findet also an der Stelle $x = 1$ ein Vorzeichenwechsel von + nach − statt, die Stelle ist also ein Hochpunkt.

Für die Lage des Punktes berechnen wir noch $f(1) = 1$ und erhalten den Punkt $H(1|1)$.

Teilaufgabe (c)

Für $x < 0$ gilt $f(x) = \dfrac{\overbrace{4x}^{<0}}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0}} < 0$.

Daher verläuft der Graph von f für $x < 0$ nur unterhalb der x-Achse, also insgesamt im III. Quadranten. Beim Einzeichnen des fehlenden Teils des Graphen ist die Polstelle der Vielfachheit 2 (kein Vorzeichenwechsel) bei $x = -1$ zu beachten. $f(-3) = -3$.



Teilaufgabe (d)

Um zu zeigen, dass $F(x) = 4\ln(x+1) + \dfrac{4}{x+1}$ eine Stammfunktion von f ist, zeigen wir, dass $F' = f$ gilt.

$$F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} = \underbrace{\frac{4(x+1)}{(x+1)^2}}_{\text{Erweitert mit } (x+1)} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

Teilaufgabe (e)

Da im Modell die Einheit für x Stunden sind, entsprechen 30 Minuten dem x-Wert von $\frac{1}{2}$. Wir bestimmen also $f(0,5) = \frac{8}{9}$. D.h. die Wirkstoffkonzentration beträgt $\frac{8}{9}\frac{\text{mg}}{\text{l}}$. Die maximale Konzentration entspricht dem Funktionswert am Hochpunkt, also $1\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ zum Zeitpunkt 1 Stunde nach Einnahme.

Teilaufgabe (f)

Zum rechnerischen Nachweis eines Wendepunkts bei $x = 2$ ist die notwendige Bedingung, dass $f''(2) = 0$ ist. Ist dies erfüllt, bleibt zu prüfen, ob auch $f'''(2) \neq 0$ gilt.
Gemeinsam zeigt also $f''(2) = 0 \wedge f'''(2) \neq 0$ den Wendepunkt bei $x = 2$.

Im Sachzusammenhang ist $x = 2$ (also 2 Stunden nach Einnahme) der Zeitpunkt, an dem die größte momentane Abnahme der Wirkstoffkonzentration stattfindet.

Teilaufgabe (g)

Zu bestimmen ist zunächst die Integralfunktion

$$A(b) = \int_0^b f(x)dx = [F(x)]_0^b = F(b) - F(0) =$$

$$= 4\ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - \left(\ln(0+1) + \frac{4}{0+1}\right) = 4\ln(b+1) + \frac{4}{b+1} - 4$$

Die *Area under the Curve* ist das uneigentliche Integral

$$AUC = \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} A(b) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \underbrace{4\ln(b+1)}_{\to+\infty} + \underbrace{\frac{4}{b+1}}_{\to 0} -4 = \text{"}\infty + 0 - 4\text{"} = \infty$$

Da diesem Flächenstück kein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann, kann die betrachtete Funktion f die zeitliche Entwicklung der Wirkstoffkonzentration für große Zeitwerte x **nicht** realistisch beschreiben.

Teilaufgabe (h)

Gesucht ist der Zeitpunkt x, an dem $f(x) = 0,75$ gilt und gleichzeitig die Wirkstoffkonzentration bereits am sinken ist; also $x > 1$, d.h. rechts vom Hochpunkt.

$$f(x) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{4x}{(x+1)^2} = 0,75 \Leftrightarrow 4x = 0,75(x+1)^2 \Leftrightarrow 4x = 0,75(x^2+2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x = 0,75x^2 + 1,5x + 0,75 \Leftrightarrow 0 = 0,75x^2 - 2,5x + 0,75$$

Die Lösungsformel liefert $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = 3$. Nur x_2 kommt infrage (Stelle mit fallender Wirkstoffkonzentration). Die Tablette muss also spätestens 3 Stunden nach der ersten eingenommen werden.

Teilaufgabe (i)

Die zusätzliche Konzentration durch die zweite Tablette, die zum Zeitpunkt $x = 2,5$ eingenommen wird, kann durch f beschrieben werden, jedoch um 2,5 Einheiten nach rechts (in positive x-Richtung) verschoben (sodass der Einnahmezeitpunkt nicht mehr bei $x = 0$ sondern bei $x = 2,5$ liegt). Der Funktionsterm lautet dann $f(x-2,5)$; d.h. der Funktionswert $f(0)$ wird nun zum Zeitpunkt $x = 2,5$ erreicht.

Da die Konzentrationen sich addieren, ist die Gesamtkonzentration die Summe aus beiden Konzentrationen, d.h. $f(x) + f(x-2,5)$, also (B).

Teilaufgabe (j)

Für das Monotonieverhalten benötigen wir die Ableitung der Funktion $k(x) = \frac{3\cdot e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1,5$.

$$k'(x) = \frac{6e^{2x}\cdot(e^{2x}+1) - 3\cdot e^{2x}\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{6e^{4x}+6e^{2x}-6e^{4x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt

$$k'(x) = \frac{\overbrace{6\mathrm{e}^{2x}}^{>0}}{\underbrace{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}_{>0}} > 0$$

Also ist k streng monoton steigend.

Teilaufgabe (k)

Für die Bedingung, dass die Konzentration spätestens nach 1 h bei mindestens $0,75\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$ liegen soll, reicht es zu zeigen, dass $k(1) \geq 0,75$ ist, da aufgrund der strengen Monotonie der Wert nie wieder sinken wird. Es gilt:

$$k(1) = \frac{3\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1} - 1,5 \approx 1,15 > 0,75$$

Die Bedingung ist also erfüllt.

Für die Bedingung, dass die Konzentration stets 25% unterhalb von $2\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$, also unterhalb von $1,5\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$, liegen soll bestimmen wir den Grenzwert (unter einmaliger Verwendung der Regel von l'Hospital bei $\frac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\cdot\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} - 1,5\right) = -1,5 + \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \stackrel{\text{l'H.}}{=} -1,5 + \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 2\mathrm{e}^{2x}}{2\mathrm{e}^{2x}} = -1,5+3 = 1,5$$

Aufgrund der strengen Monotonie nähert sich die Konzentration dem Grenzwert von unten, erreicht ihn aber nicht. Beide Bedingungen sind also erfüllt.