Lösungsvorschläge zum Abitur Bayern 2019

Keine offiziellen Lösungen, keine Garantie auf Vollständigkeit, Korrektheit etc.

Teil B, Analysis, Aufgabengruppe I ***Skate-Park***

Teilaufgabe (1a)

Einschränkend auf den Definitionsbereich wirkt bei der Funktion $f : x \mapsto 2-\ln(x-1)$ die natürliche Logarithmusfunktion. $\ln t$ ist nur für $t > 0$ definiert, also muss $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ gelten. Dies entspricht der Definitionsmenge $D_f =]1; \infty[$.

$$\lim_{x\to 1} 2 - \ln(x-1) = \lim_{x\to 1} 2 - \lim_{x\to 1} \ln(x-1) = 2 - (-\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x\to \infty} 2 - \ln(x-1) = \lim_{x\to \infty} 2 - \lim_{x\to \infty} \ln(x-1) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

Teilaufgabe (1b)

Wir setzen den Funktionsterm Null und erhalten:

$$2 - \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow 2 = \ln(x-1) \Leftrightarrow e^2 = x - 1 \Leftrightarrow e^2 + 1 = x$$

Teilaufgabe (1c)

Der Graph der natürlichen Logarithmusfunktion wird zunächst um 1 nach rechts verschoben (wegen Argument $x - 1$ im Logarithmus), dann an der x-Achse gespiegelt (wegen Minus vor dem Logarithmus) und abschließend um 2 nach oben verschoben (wegen Summand 2). Weil die natürliche Logarithmusfunktion streng monoton wachsend ist, ist der Graph von f streng monoton fallend; die Verschiebungen haben keine Auswirkung auf Monotonie, die Achsenspiegelung an der x-Achse kehrt die Monotonie um.

Teilaufgabe (1d)

Um zu zeigen, dass die Funktion $F : x \mapsto 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$ eine Stammfunktion von f ist, zeigen wir $F' = f$. Es gilt:

$$F'(x) = 3 - \underbrace{\left[1\cdot\ln(x-1) + (x-1)\cdot\frac{1}{x-1}\right]}_{\text{Produktregel}} = 3 - [\ln(x-1) + 1] = 2 - \ln(x-1) = f(x)$$

Nun soll gelten, dass $F(2) = 0$. Um das zu erreichen, nutzen wir aus, dass sich Stammfunktionen um eine additive Konstante $+C$ unterscheiden können. Die gesuchte Stammfunktion (nennen wir sie F^*) sei also von der Form $F^*(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1) + C$.

$$F^*(2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3\cdot 2}_{=6} - (2-1)\cdot\underbrace{\ln(2-1)}_{=0} + C = 0 \Leftrightarrow 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -6$$

Insgesamt ist also $F^*(x) = 3x - (x-1)\cdot\ln(x-1) - 6$ der Term einer Stammfunktion, für die $x = 2$ eine Nullstelle ist.

Teilaufgabe (2a)

Der Funktionswert $f(2)$ gibt die Höhe des horizontalen Plateaus an.

Die Graph der Funktion q für $-8 \le x \le -2$ entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion f an der y-Achse. Dafür ersetzen wir alle x im Funktionsterm von f durch $-x$:

$$g(x) = f(-x) = 2 - \ln(-x-1)$$

Teilaufgabe (2b)

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[2;8]$ wird bestimmt durch den Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(8) - f(2)}{8-2} = \frac{2 - \ln 7 - (2 - \ln 1)}{6} = \frac{-\ln 7}{6}$$

Gesucht ist jetzt die Stelle x_m, für die $f'(x_m) = \frac{-\ln 7}{6}$ gilt. Wir bestimmen zunächst f':

$$f'(x) = \frac{-1}{x-1}$$

Dann:

$$\frac{-1}{x_m - 1} = \frac{-\ln 7}{6} \Leftrightarrow x_m = 1 + \frac{6}{\ln 7}$$

Wegen $x_m = 1 + \dfrac{6}{\ln 7} \approx 4,08 \in [2;8]$ ist unser Wert eine gültige Lösung.

Teilaufgabe (2c)

Verbinde die Punkte $(2, f(2))$ und $(8, f(8))$ mit einer Geraden. Die Steigung dieser Geraden ist die mittlere Änderungsrate im Intervall $[2;8]$. Verschiebe die Gerade parallel, sodass sie zu einer Tangenten an den Graphen wird. Die x-Koordinate des Punktes, an dem diese Tangente den Graphen berührt, ist das gesuchte x_m.

Teilaufgabe (2d)

Wir berechnen zunächst den Steigungswinkel der Funktion f an der Stelle 2 über den Ansatz $\tan\gamma = f'(2)$. Es gilt also:

$$\tan\gamma = f'(2) = \frac{-1}{2-1} = -1 \text{ und damit } \gamma = \arctan(-1) = -45°$$

Der Winkel α ist der Gegenwinkel, also folglich $\alpha = 135°$.

Teilaufgabe (2e)

Die gesamte Werbefläche berechnet sich durch

$$2\int_2^6 f(x)dx = 2 \cdot [F(x)]_2^6 = 2\,[18 - 5\ln 5 - 6] = 2\,[12 - 5\ln 5] = 24 - 10\ln 5 \approx 7,91 \ [\mathrm{m}^2]$$

Teilaufgabe (3a)

Die Scharfunktion g_k ist für alle $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine Polynomfunktion dritten Grades. Daher gilt im Fall $k > 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} g_k(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_k(x) = +\infty$$

und im Fall $k < 0$ genau umgekehrt:

$$\lim_{x \to -\infty} g_k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g_k(x) = -\infty$$

Teilaufgabe (3b)

Gesucht ist die Wendestelle. Dafür benötigen wir wir g_k'', also die zweite Ableitung. Es gilt:

$$g_k'(x) = 3kx^2 + 6\,(k+1)\,x + 9$$

$$g_k''(x) = 6kx + 6\,(k+1) = 6\,(kx + k + 1)$$

Die Nullstelle von $g_k''(x)$ bestimmen wir durch:

$$6\,(kx + k + 1) = 0 \Leftrightarrow kx + k + 1 = 0 \Leftrightarrow kx = -k - 1 \Leftrightarrow x = \frac{-k-1}{k} = \frac{-1}{k} - 1$$

Dies entspricht dem Kontrollergebnis. Wegen $g_k'''(x) = 6k \neq 0$ für alle x ist das tatsächlich eine Wendestelle.

Teilaufgabe (3c)

Auf der y-Achse liegt der Wendepunkt, wenn für die Stelle $x = \dfrac{-1}{k} - 1 = 0$ gilt. Dies ist für $k = -1$ erfüllt. Die zugehörige Funktion lautet dann:

$$g_{-1}(x) = -x^3 + 3 \cdot (-1+1)x^2 + 9x = -x^3 + 9x$$

Dabei gilt offensichtlich $g_{-1}(0) = 0$, d.h. der Wendepunkt liegt im Ursprung. Außerdem gilt:

$$g_{-1}'(x) = -3x^2 + 9$$

und damit $g_{-1}'(0) = 9$, d.h. die Tangente durch den Ursprung hat die Steigung 9.

Teilaufgabe (3d)